**Теорема о существовании одномерного или двумерного инвариантного подпространства линейного оператора над R**

***Теорема.*** Любое линейное преобразование конечномерного действительного линейного пространства L обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством U.

Доказательство. Если .

Если все характеристические корни мнимые, пусть один из них, тогда также является характеристическим корнем, т.к. характеристический многочлен  - многочлен с действительными коэффициентами. Значит, по теореме Безу, , где - многочлен с действительными коэффициентами.

Рассмотрим  как линейное преобразование пространства  по формуле . В комплексном пространстве любой комплексный характеристический корень является собственным значением, следовательно,



Это показывает, что - инвариантное подпространство. Покажем, что оно двумерное. Допустим, что , т.е. - собственный вектор (с вещественным собственным значением) – противоречие. □

Второй способ доказательства для комплексного характеристического корня. Как выше, пусть - характеристический корень, тогда также является характеристическим корнем, и , где - многочлен с действительными коэффициентами. Обозначим . Рассмотрим преобразование с матрицей . Таким образом, - вырожденное преобразование, и подпространство - ненулевое инвариантное подпространство. Проверим инвариантность: для любого 

Покажем, что для фиксированного вектора - двумерное инвариантное подпространство. В самом деле, ,

т.е. инвариантно, и . Однако, если бы было - противоречие, т.к. не имеет действительных корней. Итак, - искомое двумерное инвариантное подпространство.